Eötvös Loránd Tudományegyetem

Elektrodinamika - Vizsgatételek

Vida Ádám

Tartalomjegyzék

1. Maxwell-egyenletek, határfeltételek, kontinuitási egyenlet

Az elektrodinamika törvényeit a Maxwell-egyenletek foglalják magukba. Az egyenleteket (azok integrális alakját) két különböző formában írjuk fel:

$$c^2 \oint B ds = \int \frac{\partial E}{\partial t} df + \frac{1}{\epsilon_0} \int j df \tag{1}$$

$$\oint E df = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV \tag{2}$$

$$\oint E ds = - \int \frac{\partial B}{\partial t} df \tag{3}$$

$$\oint B df = 0 \tag{4}$$

Itt j az áramsűrűség vektor, a ρ pedig a térfogati töltéssűrűség. A másik felírásban csak az első kettő változik meg.[1]

$$\oint H ds = \int \frac{\partial D}{\partial t} df + \int j df \tag{5}$$

$$\oint D df = \int \rho dV \tag{6}$$

Az egyenletekben nem tüntettem fel a vektorokat. A E, B, H, D értelemszerűen azok, a df, ds pedig rendre a felületelem, valamint az ívelem vektorok.

A konstansok eltűnése lényegtelen különbség. A kétféleképpen felírt egyenletek között az anyagállandók jelentik az összefüggést. Fontos, hogy a két fajtában az áramsűrűség és a térfogati töltéssűrűség vektorok **NEM** ugyanazok! Az első formában a ρ felbontható $\rho = \rho_{pol} + \rho_{valodi}$ töltéssűrűségekre. A második fajtában már csak a valódi töltéssűrűségek szerepelnek.

> Elektromos tér nélkül egy atom pozitív és negatív töltéseinek töltésközéppontjai egybeesnek. Az ilyen atomot semleges atomnak nevezzünk. Ha külső térrel megbolygatunk egy ilyen atomot, a TKP-k szétválnak, az atom pedig polarizálódik.

Persze ugyanez megtehető az áramsűrűséggel is: $j = j_{pol} + j_{mgn} + j_{val}$. Az elsőben mindegyik, a másodikban már csak a valódi szerepel. A **H** és **D** mennyiségek segédmennyiségek. Kizárólag azért vezetjük be őket, hogy már csak a valódi dolgokkal kelljen foglalkoznunk, de végeredményben mindig az E és B értékekre vagyunk kíváncsiak. Némely anyagokra viszonylag könnyű összefüggés adható az E, B és D, H között, valahol nagyon bonyolult. SI rendszerben dolgozunk végig, ezért letisztázzuk, hogy **alapmennyiségünk az I áramerősség lesz.**

[1] Mi valamilyen okból kifolyólag nem úgy számozzuk az egyenleteket, mint mindenki más, de mivel a tanár így iratta fel, gondolom a vizsgán is így kéri majd...

Mit fejeznek ki a Maxwell-egyenletek?

- Az áram és az időben változó elektromos tér mágneses teret kelt
- Az elektromos tér forrásos, forrásai és nyelői a töltések
- Az időben változó mágneses tér elektromos teret kelt
- A mágneses tér forrásmentes, azaz nincs mágneses monopólus

1.1. A differenciális egyenletek

Néha, ha a feladat jellege olyan, nagyobb hasznát vesszük a differenciális egyenleteknek. Meg kell azonban említeni, hogy ha a feladat valamilyen szimmetriát mutat, az integrális alakok sokkal célravezetőbbek. Hogy eljuthassunk a differenciális alakig, használnunk kell a Gauss-, és Stokes-tételt. Az egyenletek a következő alakban írhatók:

$$c^2 rotB = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\epsilon_0} \tag{7}$$

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{8}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{9}$$

$$divB = 0 \tag{10}$$

1.2. A határfeltételek

Ha van egy felületem, ami mondjuk 2 részre osztja a teret, akkor a differenciális alakok **térrészenként igazak.** A határfelületen határfeltételek vannak érvényben. Az integrális egyenletek tartalmazzák a differenciális egyenleteket és a határfeltételeket is! Az integrális alakokból levezethető határfeltételek a következők:

- $E_{n2} - E_{n1} = \frac{\eta}{\epsilon_0}$, az elektromos térerősség felületre merőleges (normális) komponense a két térrészt elválasztó felületen ugrik, az ugrás nagysága arányos a felületi töltéssűrűséggel (η). Azért vonjuk ki a két térerősséget, mert a tetszőlegesen választott n - normális következtében az egyik térerősség ellentett irányítású.

- $E_{t1} = E_{t2}$, az elektromos térerősség felülettel párhuzamos, tangenciális komponense (ami egy kétkomponensű vektor) a két térrészt elválasztó felületen folytonosan megy át.

- $B_{n2} = B_{n1}$, a mágneses indukció vektor folytonos

- $n \times (B_2 - B_1) = \frac{i}{\epsilon_0 c^2}$, a mágneses indukció vektor tangenciális komponense (ez ad járulékot a vektorszorzatból) ugrik, az ugrás nagysága az **i** felületi áramsűrűség vektorral arányos. Az n normális az 1-es térrészből a 2-es térrészbe mutató vektor. Ha a felületeket elválasztó határon nincsen felületi áramsűrűség, akkor $B_{t2} = B_{t1}$.

Ismételten: az integrális Maxwellek úgy ekvivalensek a differenciálisokkal, hogy figyelembe vesszük a határfeltételeket.

1.3. A kontinuitási egyenlet

A (7) egyenlet divergenciáját és a (8) egyenlet idő szerinti parciális deriváltját összehasonlítva megkapjuk a kontinuitási egyenletet, ami a töltés megmaradását fejezi ki.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + divj = 0 \tag{11}$$

Az egyenletet egy tetszőleges térfogatra integrálva a Gauss-tétel segítségével kapjuk a

$$\frac{d}{dt}\int \rho dV + \oint jdf = 0 \tag{12}$$

egyenletet. A felület normálisa a térfogatból kifelé irányul! Ez azt mondja, hogy tetszőleges térfogatban az elektromos töltés csak azért változhat meg, mert a térfogat határfelületén szabadon töltés áramolhat be és ki. A Maxwellek tehát implicit tartalmazzák a töltés megmaradását (következmény = a világegyetem összetöltése állandó). *A j térfogati áramsűrűség jelentése: j irányára merőleges egységnyi felületen időegység alatt áthaladó töltés.*

1.4. Az OHM törvény

Nem szerepel a Maxwell-egyenletekben. A j áramsűrűség két részre osztható. $j = j_{vez} + j_{konv}$, az első a vezetőben folyó (konduktív) áramsűrűség, a másik a szabadon mozgó töltések konvektív áramsűrűsége. $j_{konv} = \rho \cdot v$. Az Ohm-törvény **kapcsolatot teremt a vezetőben folyó áram sűrűsége és az elektromos térerősség között.** A tapasztalat szerint [2]

$$I = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l} \cdot q$$

, ahol $\Delta\Phi$ az l hosszúságú q állandó keresztmetszetű vezető végei közt mérhető potenciálkülönbség, σ a vezetőre jellemző arányossági tényező. Tudjuk, hogy $R = \frac{l}{\sigma \cdot q}$ így felírható az Ohm-törvény integrális alakja:

$$I = \frac{\Delta\Phi}{R} \tag{13}$$

A differenciális alakhoz az $l \to 0$ határátmenettel juthatunk el:

$$j = \frac{I}{q} = \sigma \frac{\Delta\Phi}{l} \longrightarrow \sigma|grad\Phi| = \sigma|E|$$

Mivel az áram iránya megegyezik a pozitív töltésmozgás irányával, az Ohm-törvény differenciális alakja a következőképpen írható:

$$j = \sigma E \tag{14}$$

Ez pontról pontra jó, feltéve, hogy folyik ott áram.

[2] Hiszen az Ohm-törvény egy tapasztalati törvény

Relaxációs idő. Hogyan változik a vezető, vagy szigetelő belsejébe vitt töltés sűrűsége az időben? Levezetni nem fogom. A lényeg, hogy egy időfüggés a töltéssűrűségre. Másképp mondva: ha pl. rézre nézem, aminek a vezetőképessége nagyon nagy, arra a relaxiációs idő nagyon kevés lesz. Ez lényegében egyértelmű, hiszen ez pont azt fogja megadni, hogy milyen gyorsan ül ki a töltés a vezető felszínére. A diffegyenlet megoldása:

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon_0}t}$$

Ez már csak plusz

Mivel a tételsorból egyáltalán nem derül ki, hogy visszakérdezi-e a következő dolgokat, úgy döntöttem inkább beleírom.

- Töltéssűrűségek: térfogati, felületi, vonal menti. Ezeket értelemszerűen úgy kell elképzelni, hogy vesszük az összes töltést, ami jelen van a problémánkban (valamint a vizsgált térrészen belül van) és ezt elosztjuk a vizsgált térrész térfogatával, felszínével, hosszával; végezetül képezzük a határértéket. Egy példa a térfogatira:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$$

- Dipólus: ez majd előjön a dielektrikumoknál főleg. A dipólmomentum gondolom ismert. A dipólmomentum sűrűség szintén egy, az előzőhöz hasonló mennyiség. Van belőle **térfogati (amit mi polarizációs vektornak is hívunk)**, valamint felületi (amint nem használunk sokat).

- Érdemes megjegyezni, hogy áramsűrűségből is van térfogati (j) és felületi is (i) - bár, ha elolvastad a jegyzetet, ez már ki kellett, hogy derüljön.

- Az **elektromos térerősséget a Coulomb-törvényből** definiáljuk: $F = QE$.

- A mágneses indukció definíciója a **körvezetőre gyakorolt forgatónyomaték** alapján adható meg: $M = I \cdot f \times B$, ahol f a felületelem.

2. Elektrosztatika, szigetelők, vezetők

Az elektrosztatika egyenleteit úgy kapjuk, hogy a Maxwell-egyenletekbe az időderiváltak helyébe nullát írunk.

$$rotB = 0$$
$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$
$$rotE = 0$$
$$divB = 0$$

Látható, hogy az elektromos és mágneses tér között nincs kapcsolat, ezért a kettő külön tárgyalható. Az elektrosztatika integrális egyenletei:

$$\oint Edf = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

$$\oint Eds = 0$$

Ezeket akkor tudjuk használni, ha a feladat szimmetriát mutat. Egyébként a differenciális alakokat kell megoldani a határfeltételekkel (!) együtt. Az előadáson példaként az egyenletesen töltött gömb tere volt, azt beleírom ide. *Legyen egy R sugarú gömb össztöltése q. Ekkor* $\rho = \frac{3e}{4\pi R^3}$ *A gömbszimmetria miatt a térerősség csak a középponttól mért távolság (r) függvénye. Mivel megkönnyíti a dolgunkat ilyen esetekben, most is gömbi koordinátákat használunk. Megmutatható, hogy a* E_φ *és* E_ϑ *komponensek nullával egyenlők. Csak a radiális komponens különbözik a nullától. Az első integrális egyenletet megoldjuk a gömbre. Két esetet különböztetünk meg*

1. A gömbön kívül $E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$
2. A gömbön belül $E_r = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}$

Érdekesség: egy homogén tömegeloszlású gömb gravitációs tere is ilyen alakú

Szimmetria híján a differenciális egyenleteket kell megoldanunk térrészenként, majd a határfeltételekkel összeillesztenünk. Mivel az E rotációja zérus, az felírható egy skalárfüggvény gradienseként.

$$E = -grad\phi$$

, ahol ϕ a skalár potenciál. Mint a mechanikában, itt is a -ϕ gradienseként definiáljuk az erőt, ami hat az egységnyi töltésre (E-ről van szó). Ezzel a választással a potenciális és mozgási energia összege állandó. A második egyenletbe helyettesítve az $E = -grad\phi$-t, megkapjuk a Poisson egyenletet

$$divgrad\phi = \triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{15}$$

Ezt kell térrészenként megoldani és összeilleszteni az elektromos térerősségre vonatkozó határfeltételekkel. **A potenciálkülönbség fizikai jelentése: a ponttöltésen az elektromos térerősség által végzett munka.** Végül felírjuk az r' pontban lévő q ponttöltés elektromos terét az r pontban.

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(r-r')}{|r-r'|^3}$$

A Maxwell-egyenletek lineárisak, tehát a megoldások tetszőleges lineáris kombinációi is megoldások (szuperpozíció). Egy tetszőleges $\rho(r')$ töltéseloszlás úgy kapható meg, hogy a kicsi dV' térfogatban lévő töltések elektromos tereit összeadjuk (azaz integráljuk)

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')(r-r')}{|r-r'|}dV'$$

Egy ponttöltés potenciálja:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|r-r'|}$$

Egy $\rho(r')$ töltéseloszlás potenciálja:

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(r')}{|r-r'|}dV'$$

Ha le tudnánk írni egy ponttöltés töltéssűrűségét, akkor az általános képletet is használhatnánk, hogy megkapjuk a ponttöltés potenciálját. A keresett töltéssűrűség olyan, hogy a töltés helyén végtelen, máshol nulla. Nem segíthet rajtunk más, mint a jó öreg Dirac-delta. Ez egy általánosított függvény. Az r_0 helyvektorú q töltés töltéssűrűsége így

$$q\delta(r-r_0), \int q\delta(r-r_0)dV = q$$

Dipólus potenciálja (az egyes töltések potenciáljának d/r szerinti sorfejtésével kapható):

$$\phi(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(p\cdot grad\frac{1}{r}\right)$$

Figyelem, a grad(1/r) és az r is vektorok, tehát az skalárszorzat, ami a zárójelen belül van. A képletben szereplő p a két töltés dipólmomentum vektora, ami a negatív töltésből a pozitívba mutat. A kis dipólus térerősségvektora:

$$E = -grad\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}\right)$$

Legyen adva bármilyen töltéseloszlás. Szeretnénk meghatározni ennek a közelítő potenciálját nagy távolságban. A koordináta rendszerünk kezdőpontját közel vegyük fel a töltéseloszláshoz. A q_i töltés helyvektora legyen d_i, a potenciálponté pedig R_iA töltéstől a potenciálpontig mutató helyzetvektor legyen r_i. A rendszer össztöltése legyen Q, az eredő dipólmomentum pedig

$$p \equiv \sum q_i d_i$$

- 1. közelítésben $R >> d_i$ esetén $r_i \approx R$, $\phi = \frac{\sum q_i}{4\pi\epsilon_0 R}$, tehát a kezdőpontban lévő Q össztöltés potenciáljával egyenlő.
- 2. közelítésben

$$r_i = \sqrt{R^2 + d_i^2 - \mathbf{2Rd_i}} \approx R - \frac{\mathbf{Rd_i}}{R}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \frac{\mathbf{pR}}{R^3} + ...\right)$$

A kezdőpontban lévő Q töltés és a p dipólmomentum potenciáljával egyenlő. A zárójelben lévő ... a magasabb rendű tagok elhanyagolásából adódik. Amit kaptunk végeredményül, az az ún. multipólus sorfejtés első két tagja.

2.1. Vezetők

A vezetők olyan ($\sim$ szilárd) anyagok, melyek sok szabad elektronnal rendelkeznek. A szabad elektront úgy kell érteni, hogy az atomok legkülső elektronjai nem kötődnek olyan szorosan az atomhoz, elektromos erőtér hatására mozgásba jöhetnek. Emiatt elektrosztatikailag csak az lehetséges, hogy a **vezető belsejében az elektromos térerősség nulla, a vezető felületén pedig E merőleges a felületre.** A vezető külső felülete emiatt ekvipotenciális felület. **A vezető belsejében div E is nulla, ezért a térbeli töltéssűrűség is nulla kell, hogy legyen.** *Ezt úgy kell érteni, hogy nem megyünk olyan közel a protonhoz és neutronhoz atomon belül, hogy érezzük ezek elektromos terét, hanem veszünk egy nagyon kicsi tartományt, ami még mindig nagyon sok atomot (tehát protont és neutront) tartalmaz és ebben vizsgálódunk.* Azt fogjuk vizsgálni, hogyan változik a vezető belsejébe vitt töltés az idő függvényében. Az Ohm törvény szerint $j = \sigma E$, azonban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy σ állandó. A kontinuitási egyenletet alakítva:

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + divj = ... = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sigma\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Ennek megoldása

$$\rho = \rho_0 e^{\alpha}, \alpha = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}t$$

A töltéssűrűség tehát $t_r = \frac{\epsilon_0}{\sigma}$ relaxációs idő alatt csökken az e-ad részére.

A Faraday-kalitkáról: Lehet-e elektromos erőtér a vezető belsejében lévő üres üregben? Vegyük körül az üreget egy olyan zárt felülettel, ami a vezetőben található. A felületen E=0. Erre a felületre $\oint Edf = 0$, ami azt jelenti, hogy az üregben az össztöltés 0. Az lehetséges lenne még, hogy az üreg belső felületén azonos számban találhatóak pozitív és negatív töltések. Tegyük fel, hogy ez igaz. Rajzoljunk meg egy erővonalat az üregben, ami a pozitívból a negatívba mutat. Hosszabbítsuk meg és csináljunk belőle zárt görbét úgy, hogy a meghosszabbítás a vezetőben történjen. Erre a zárt görbére $\oint Eds = 0$. Az integrálhoz a vezetőben lévő szakasz nem ad járulékot. Ha értéke mégis nulla, akkor nincsenek töltések a belső falán sem!

Okosságok:

- A töltésmegosztásból származó töltéseket valódi töltéseknek nevezzük.
- A tükrözés módszerénél nagyon fontos, hogy amire tükrözünk (fém) az ekvipotenciális felület legyen (don't fos: az)
- Tükrözésnél (gömbre) a Maxwellek teljesülnek; határfeltétel az, hogy a gömb ekvipotenciális felület, tehát a megoldás egyértelmű.

2.2. Szigetelők (dielektrikumok)

Ha a kondenzátor lemezei közé szigetelőt nyomunk, akkor a kondi kapacitása ϵ_r-szorosára nő, ami a szigetelő anyagának relatív dielektromos állandója. Magyarázat: **a szigetelő az elektromos tér hatására polarizálódik**, a semleges atom töltésközéppontjai egy kicsit szétválnak, és **indukált dipólmomentum** jön létre. A térfogategység dipólmomentuma (amit polarizációs vektornak is szoktunk hívni): $P = Nqd$, ahol N az atomok számsűrűsége, qd pedig egy indukált dipólmomentum. Térfogati dipóluseloszlás potenciálja:

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int P(r')\cdot grad_r\frac{1}{|r-r'|}dV'$$

ám ez az összefüggés átírható egy érdekesebb formába:

$$\phi(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{(-divP)}{|r-r'|}dV' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\oint \frac{P_n}{|r-r'|}df' \qquad (16)$$

Itt a második integrált a dipóleloszlást határoló felületre kell képezni, az integrációs változó mindkét esetben r'. Megállapítható, hogy **a dipóluseloszlás potenciálja egy $-divP$ térfogati és egy P_n[3] felületi töltéseloszlás potenciáljával ekvivalens.** Sok szigetelőre teljesül, hogy $P = \chi\epsilon_0 E$, ahol χ az anyag elektromos szuszceptibilitása. A síkkondiban (közelítésben) az E és P is állandó, ezért $\rho_{pol} = -divP = 0$, a szigetelő felületén pedig $\eta_{pol} = P_n$. Felhasználva az E normális komponensére vonatkozó határfeltételt, a kondiban

$$|E| = \frac{\eta}{\epsilon_0} = \frac{\eta_{val}+\eta_{pol}}{\epsilon_0} = \frac{\eta_{val}-|P|}{\epsilon_0} = \frac{\eta_{val}-\chi\epsilon_0|E|}{\epsilon_0}$$

így pedig

$$|E| = \frac{\eta_{val}}{\epsilon_0}\frac{1}{1+\chi}$$

A kondenzátor kapacitására a következő összefüggés adódik:

$$C = \frac{\epsilon_r\epsilon_0 F}{d}$$

A tapasztalatnak megfelelően $\epsilon_r = 1+\chi$

Ugyanígy szétválasztható a térfogati töltéssűrűség polarizációsra és valódira:

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{val}-divP}{\epsilon_0}$$

[3] P_n a polarizáció vektor térfogatból kifelé mutató normális komponense

Ebből

$$div\left(E + \frac{P}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{val}}{\epsilon_0}$$

Bevezetjük **az elektromos eltolás vektorát**

$$D \equiv \epsilon_0 E + P$$

Ezzel az elektrosztatika egyenletei a következő alakot öltik:

$$divD = \rho_{val}, rotE = 0$$

D-nek nincs olyan fizikai jelentése, mint az E-nek, vagy a P-nek, pusztán azért vezettük be, mert ebben az egyenletben csak a valódi töltéssűrűségek szerepelnek és ezt általában jobban ismerjük, mint a polarizációsat. Így az egyenletet is könnyebb lesz megoldani, mint az E-re vonatkozót. Hasonlóan alakítjuk az **E normális komponensére vonatkozó határfeltételt:**

$$E_{n2} - E_{n1} = \frac{\eta}{\epsilon_0} = \frac{\eta_{val} - P_{n2} + P_{n1}}{\epsilon_0} \tag{17}$$

Az n normálvektor az 1-es közegből a 2-es felé mutat. P_{n2} előtt azért van - előjel, mert a polarizációs felületi töltést a polarizációs vektor **közegből kifelé mutató komponense adja meg.** Az egyenletet átrendezve kapjuk, hogy:

$$D_{n2} - D_{n1} = \eta_{val}$$

Tehát a D normális komponensére vonatkozó határfeltételben is csak a valódi töltés jeleik meg.

Okosságokat írok ide megint, mert szeretek okoskodni:

- Olyan közegekben számolgattunk eddig, melyekre teljesül, hogy $P = \chi\epsilon_0 E$. Ezekben a közegekben felírom az összefüggést az anyagállandók között: $\mathbf{D} = \epsilon_\mathbf{0}(\mathbf{1} + \chi)\mathbf{E} = \epsilon_\mathbf{0}\epsilon_\mathbf{r}\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}$
- Ha a közeg nem ilyen, szarabb a helyzet. Ki kell mérni a P-t, hogy meghatározhassuk az E-t. Ez pedig nehéz. A tapasztalat szerint ilyenkor $\chi > 0$, valamint ϵ egy tenzor. Az ilyen anyagokat *ferroelektromos anyagoknak* nevezzük.
- A D-re lehet mérési utasítást adni, tehát tekinthető valódi fizikai mennyiségnek, mi mégis segédmennyiségként használjuk.
- FONTOS: Az elektromos megosztás nem polarizáció! A polarizációnál a töltésközéppontok picit távolodnak el, a megosztásnál nagyon.

Anyagszerkezeti szempontból érdekes kérdés, hogy milyen a térerősség dielektrikumok belsejében. Helyezzünk egy dielektrikumot a kondi fegyverzetei közé és olyan helyen vizsgálódjunk, ahol E már állandónak tekinthető. Ez a dielektrikumon belüli átlagos értéknek kell tekintenünk, hiszen a közeg atomjai között mozogva gyorsan változó teret észlelnénk. Mi persze nem erre vagyunk kíváncsiak, hanem egy sok atomot tartalmazó térfogatra átlagolt értékre. Itt jön az a rész, amit gyakorlaton csináltunk. Egy üreg merőlegesen a fegyverzetekre, egy meg párhuzamosan velük.E_0-al jelölöm az üregen belüli térerősséget.

- Mikor az üreg merőleges a fegyverzetekre:

$$\oint E ds = 0$$

$$E_0 l + E l = 0$$

$$E_0 = -E$$

- Mikor párhuzamos az üreg a fegyverzettel:

$$-\epsilon_0 E_0 F + \epsilon E F = 0$$

$$\epsilon_0 E_0 = \epsilon E$$

$$E_0 = \frac{D}{\epsilon_0}$$

Végezetül tekintsünk egy gömb alakú üreget. Ebben a térerősség:

$$E_{ureg} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

A későbbiekben szükség lesz egy E_0 külső térerősség által polarizált gömb eredő dipólmomentumára

$$p = \frac{4}{3}\pi a^3 P$$

$$P = 4\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_0 - 2} a^3 E_0$$

3. Stacionárius áram, mágneses tér, Ohm törvény, Kirchoff törvények

Ebben a tételben az egyenáramokról és az áram által keltett mágneses terekről lesz szó. Feltesszük, hogy a mágneses és elektromos tér időben nem változik. Felírjuk az ide tartozó mágneses indukcióra vonatkozó differenciális egyenleteket.

$$divB = 0 \tag{18}$$

$$rotB = \frac{j}{\epsilon_0 c^2} \tag{19}$$

Mivel a **B** divergenciája nulla, az felírható egy vektor rotációjaként:

$$B = rotA$$

$$A' = A + grad\chi$$

Ez az A' ugyanazt a B vektort állítja elő, mint az A, tehát utóbbi csak egy ún. mérték-transzformáció erejéig meghatározott, ezért mi kiszabhatunk rá valamilyen mellékfeltételt. Felírjuk a Coulomb-mértéket, ami azt jelenti, hogy a következőnek teljesülni kell (ezt szabjuk ki):

$$divA = 0$$

Ezzel áttérhetünk a másik egyenletre:

$$rotB = rotrotA = graddivA - \nabla A = \frac{j}{\epsilon_0 c^2}$$

$$\Delta A = -\frac{j}{\epsilon_0}$$

Ez olyan alakú, mint a Poisson egyenlet. Felírjuk belőle a **vektorpotenciált:**

$$A(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \frac{j(r')}{|r - r'|} dV'$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dV'$$

Vegyük figyelembe, hogy lineáris vezetőre $jdV = Ids$. Így felírható a **Biot-Savart törvény**

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{ds' \times (r - r')}{|r - r'|^3} \tag{20}$$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{ds \times (r - r')}{|r - r'|^3} \tag{21}$$

Ennek alkalmazásaként határozzuk meg egy kisméretű vezetőhurok mágneses terét a huroktól nagy távolságban. Az $A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{ds'}{|r-r'|}$ egyenlet mindkét oldalát skalárisan megszorozzuk a-val, hogy használni lehessen a Stokes-tételt, majd vektoranalitikai azonosságok és ciklikus permutációk elvégzése után eljutunk a következőhöz:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = rot\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3(\mathbf{mr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}\right) \tag{22}$$

Az egyenlet nem más, mint m momentum mágneses tere tőle r távolságban. Itt $m = I\int df'$ és iránya merőleges a hurok síkjára.

A határfeltételekről még nem esett szó ebben a fejezetben.

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$$n \times (B_2 - B_1) = \frac{i}{\epsilon_0 c^2}$$

3.1. Áramforrások

Töltések szállítását a Van der Graaf generátornál mechanikai erő, galvánelemnél, kémiai elemnél pedig kémiai erő hozza létre. Ezek biztosítják az állandó potenciálkülönbséget. Bevezetjük a beoltott elektromotoros erőre jellemző vektort $\equiv E'$. *Ez azzal az elektromos térerősséggel egyenlő, ami a töltésszétválás során létrejött térerősséget kompenzálja, ha nincs áram.* Lineárisnak nevezzük azt a vezetőt, amelyben a j áramsűrűség és a ds vonalelem párhuzamos egymással. Kis keresztmetszetű vezetőre ez jó közelítésnek tekinthető.

$$\oint \frac{jds}{\sigma} = \oint (E + E')ds = \oint E'ds = \varepsilon$$

ε az áramforrás elektromotoros ereje. Másrészt

$$\oint \frac{jds}{\sigma} = \oint jq\frac{ds}{\sigma q} = I\oint \frac{ds}{\sigma q} = IR$$

$I = \sigma q$ az állandó keresztmetszetű vezetőben folyó áramerősség, R pedig a vezető ellenállása.

3.2. Kirchoff-törvények

Ha több áramhurok van több feszültségforrással és több ellenállással, akkor **Kirchoff II. törvénye:**

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \varepsilon_i \tag{23}$$

A $divj = 0$ egyenlet egy, a vezetők elágazási pontját körülvevő térfogatra integrálva

$$0 = \int divjdV = \oint jdf = \oint j_n df$$

A vezető határán $j_n = 0$, ezért a felületi integrálon csak az elágazási pontba ki és befutó vezetőszakaszok keresztmetszetére számított integrálok adnak járulékot. Ezek éppen az áramerősségek, tehát az elágazási pontoknál

$$\sum_k I_k = 0 \tag{24}$$

Ez Kirchoff I. törvénye, vagy a csomópont törvény.

3.3. Egyenáram elektromos tere

Vezetőn kívül: $\Delta\Phi = 0 + hatarfeltetelek$
Vezetőn belül sajnos nem nagyon ismerjük a térfogati töltéssűrűséget.

$$divj = 0 = div\sigma(E + E')$$

- Áramforráson kívül $E' = 0 \longrightarrow 0 = div\sigma E = \sigma divE + Egrad\sigma$
  - Ha szigma állandó, akkor $divE = 0, \Delta\Phi = 0 \longrightarrow \rho = 0$
  - Ha szigma változik, akkor $divE = -\frac{E \cdot grad\sigma}{\sigma}$

  Határfeltételek: $E_{t1} = E_{t2}$

  $$divj = 0 \Rightarrow j_{n1} = j_{n2} \Rightarrow \sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$$

  Ha szigma ugrásszerűen változik, például forrasztásnál, az azt jelenti, hogy van felületi töltés.

- Áramforrásban TFH σ állandó. Ekkor $divE = -divE'$ Tehát áramforrásban akkor is lehet töltéssűrűség, ha szigma állandó.

Az áram mágneses tere megfelelő szimmetriát mutató elrendezéseknél (pl. végtelen hosszú egyenes vezetőben folyó áram) az integrális Maxwell-egyenletekből viszonylag könnyen kiszámolható. Matematikai nehézségbe ütközünk azonban a végtelen miatt. Ezért most a differenciális egyenletekhez fordulunk, melyek elvezetnek a Biot-Savart törvényhez, amiből az eredmény egyszerű integrálással előállítható. Végül kiderül, hogy az eredmény ugyanaz, amit az integrális egyenletekből a végtelen problémájával nem törődve kapnánk. A végtelen hosszú, egyenes vezető mágneses tere I áramerősség esetén a tér valamilyen vezetőn kívüli pontjában (a kezdőpont a vezető valamelyik pontja):

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{I} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

3.4. Lorentz-erő

A Lorentz-erő definíciója:

$$F = q(E + v \times B) \tag{25}$$

$$\Delta F = N\Delta V q(v \times B)$$

A ΔV térfogatban levő töltésekre ható erő, ahol N a töltések számsűrűsége. A konvektív áramsűrűség $= Nqv$ (olyan, mint ρv). Ennek mintájára írjuk fel a vezető ΔV térfogatára ható erőt:

$$\Delta F = j \times B\Delta V$$

Lineáris vezetőre bevezethetjük az **áramerősség vektort**

$$I = j \cdot A$$

ahol A a keresztmetszet, amivel $\Delta V = A\Delta l$

Ezekből $\Delta F = I \times B\Delta l$

A vezető egységnyi szakaszára ható erő pedig:

$$I \times B$$

3.5. Az áramerősség definíciójának magyarázata

Az első vezető mágneses tere a második vezető helyén:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{I_1} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

A másodikra ható erő pedig:

$$|l \cdot I_2 \times B| = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2 l}{r}$$

Ez van tehát kihasználva az áramerősség definíciójánál.

3.6. A mágneses indukcióvektor definíciójának magyarázata

Nézzünk kicsi áramhurkot (köráram, kinek hogy tetszik). Ennek ds szakaszára gyakorolt forgatónyomaték hosszú matekozás után

$$dM = I(\mathbf{rB})\mathbf{ds} - I\mathbf{B}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{ds})$$

Ebből pedig

$$\mathbf{M} = I \int df \times B$$

Ezt a pici áramhurkot tehát elvileg minden pontba oda kellene tenni és úgy megnézni a dolgokat!

3.7. Tekercs mágneses tere

Feltevéssel indítunk, miszerint a mágneses tér a tekercsen kívül kicsi, benne pedig homogén. Ez nagyon pontatlan hozzáállás. Képzeletben tegyünk tekercsünkbe egy kicsi téglalap alakú hurkot, aminek fele bent van, másik fele kint. Erre a téglalapra:

$$c^2 \oint Bds = \frac{I}{\epsilon_0}$$

$$c^2 Bl = \frac{NI}{\epsilon_0}$$

ahol I az az áramerősség, amennyit a vonal átmetsz. Végül a tekercs indukciója:

$$B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{N}{l} = \frac{In}{\epsilon_0 c}$$

Itt n az egységhosszra jutó menetszámot jelenti. Meg kell mondani, hogy ez az eredmény szörnyen pontatlan. Nézzünk egy jobb közelítést.

$$B = \frac{In}{2\epsilon_0 c^2}(cos\alpha + cos\beta)$$

Ez az összefüggés a tengely 1 pontjára érvényes. Pontosabb, mint az előző és abban az esetben, ha a tekercs nagyon hosszú és vékony, visszaadja az előbb felírt összefüggést (amelyik simán pontatlan lenne).

3.7.1. Képzeljünk egy nagyon hosszú tekercset

Vágjuk el a felében, de még így is űbergiga hosszú mind a két fele. A szuperpozíció elve alkalmazható. Ha a "félig végtelen" tekercset nézem, ott a B olyan, hogy annak a vízszintes komponense $B_0/2$ Ha megnézem messziről a fluxust, ott B_0 ad járulékot. A végénél már csak $B_0/2$ Most akkor hova lett a fluxus? Kiment a tekercs határán! Végül is értjük, hiszen

$$n \times (B_2 \times B_1) = \frac{j}{\epsilon_c^2}$$

A tekercsben folyó áram felfogható úgy, mint felületi áram, szóval rendben van a határfeltétel is. Így már értjük mi történik, miért törik a B vonal.

4. Magnetosztatika

Az áramsűrűséget szétválasztjuk

$$j = j_{val} + j_{pol} + j_{magnes}$$

Ahol j_{pol} a polarizációs töltések mozgásából származó áram. Ha változik a polarizáció $\frac{\partial P}{\partial t} = Nq\frac{\partial \delta}{\partial t} \approx Nqv$. A j_{magnes} pedig az atomi köráramokból származó áram. A dielektrikumoknál egy dipóluseloszlás potenciálját alakítottuk át. Ehhez hasonlóan megállapítható, hogy egy $M(r)$ mágneses momentum sűrűség vektorpotenciálja $rotM$ térfogati és $M \times n$ felületi áramsűrűség vektorpotenciáljával ekvivalens, ahol n az eloszlás határfelületének normálisa. **Az M vektort, a térfogategység mágneses momentumát mágnesezettségnek is nevezik.** Az első Maxwell-egyenlet átírható:

$$c^2 rot\left(B - \frac{M}{\epsilon_0 c^2}\right) = \frac{j_{val}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t}\left(E + \frac{P}{\epsilon_0}\right)$$

Bevezetve a következőt (mágneses térerősség):

$$H \equiv \epsilon_0 c^2 B - M = \frac{1}{\mu_0} B - M \tag{26}$$

összefüggést,a Maxwell a kövi alakot ölti:

$$rotH = j_{val} + \frac{\partial D}{\partial t} \tag{27}$$

Viszont a statikában egyszerűbbek az egyenletek

$$divB = 0$$

$$rotH = j_{val}$$

Igaz, hogy megkapjuk a H értékét, de nekünk B-re van szükségünk. Ehhez vagy ismernünk kell M-et méréseinkből, vagy kell valami összefüggés a kettő között. Vannak olyan anyagok, amelyekre igaz, hogy

$$M = \frac{\chi_m B}{\mu_0(1 + \chi_m)}$$

Ebből $B = \mu H = \mu_0(1 + \chi_m)H = \mu_0 \mu_r H$ A képletekben χ_m a mágneses szuszceptibilitás, $(\mu_r)\mu$ a (relatív) permeabilitás.

- Diamágneses anyagok

  $\chi_m < 0$,$\mu < \mu_0$ A szuszceptibilitás kicsi és nem függ a hőmérséklettől. Ilyenek pl. a bizmut és a nemesgázok

- Paramágneses anyagok $\chi_m > 0$,$\mu > \mu_0$ Hőmérsékletfüggő szuszceptibilitás (Curie törvény). Ilyen az oxigén, alumínium, ritka földfémek.

- Ferromágneses anyagok

  B és H kapcsolata nagyon bonyolult. Ilyen a vas, kobalt, nikkel.

Néhány szót ejtünk a szupravezető anyagok magnetosztatikájáról. Tulajdonképpen nem is sztatikáról van szó, hiszen a szuperáramok játszanak fontos szerepet a jelenségben. A tapasztalat szerint a szupravezetőkbe a mágneses tér csak nagyon kicsit hatol be $\sim$ 10-100 nm -es nagyságrendben. Ezt nevezzük *Meissner-effektusnak.* A (26) összefüggés szerint B=0 esetén H=-M, ami tökéletes diamágnesességként értelmezhető. Az elektromos térerősség potenciálokkal kifejezett alakja

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - grad\Phi$$

Mivel feltételezzük, hogy a szupravezetésben a statikus töltések nem játszanak szerepet, Φ nullának vehető, így az egyenlet

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t}$$

alakúra egyszerűsödik. A szuperáram konvektív áramsűrűségének időegységre jutó megváltozása

$$\frac{\partial j_s}{\partial t} = -\frac{n_s e^2}{m}\frac{\partial A}{\partial t}$$

A kapott diffegyenlet könnyen megoldható, $j_s = -\frac{n_s e^2}{m}A$, az integrációs állandó pedig nulla, hiszen a szuperáramot az alkalmazott mágneses tér hozta létre. A feltevés szerint j_s a valódi áramsűrűséghez hozzáadódik az első Maxwellben $rotH = j_{val} + j_s$. Feltételezve, hogy valódi áram nem folyik és hogy a közeg homogenitása miatt $divH = 0$, a Maxwell rotációját képezve eljutunk a **London-egyenletig:**

$$\triangle H = \frac{n_s e^2}{m}B = \frac{n_s e^2 \mu}{m}H \tag{28}$$

Ez helyettesíti az Ohm-törvényt. Az utolsó dolog, amit itt említettünk, a **Landau-féle behatolási mélység**

$$\Lambda^{-2} \equiv \frac{n_s e^2 \mu}{m} \tag{29}$$

Azt adja meg milyen mélyen hatol be a szupravezetőbe a mágneses tér.

5. Kvázistacionárius áram, indukció, RLC-kör

Az elnevezés onnan származik, hogy a harmadik Maxwell-egyenletben megtartjuk a B idődeiváltját, az elsőben viszont elhanyagoljuk az E idődeiváltját az áramsűrűség mellett. Milyen körülmények közt számít ez jó közelítésnek? Az elektrotechnikában gyakori a vezetőben folyó periodikusan váltakozó áram $E = E_0 sin(\omega t)$, az áramsűrűséget felírhatjuk a következő alakban $j = \sigma E = \sigma E_0 sin(\omega t)$ Képezzük a következő két egyenlet

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \omega E_0 cos(\omega t)$$

$$\frac{j}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} E_0 sin(\omega t)$$

egy periódusra vett átlagának hányadosát:

$$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} = \frac{2\sigma}{4\pi\epsilon_0 \upsilon} \sim \frac{1}{\upsilon} \cdot 10^8 \frac{A}{Vm} \cdot 10^{10} \frac{Vm}{As}$$

Tehát látható, hogy az elektromos térerősség idődeiváltja elhanyagolható az áramsűrűség mellett. A kvázistacionárius áram differeciális egyenletei:

$$c^2 rotB = \frac{j}{\epsilon_0} \tag{30}$$

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{31}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{32}$$

$$divB = 0 \tag{33}$$

Az Ohm-törvény a következő alakot ölti:

$$j = \sigma(E + E') \tag{34}$$

Első körben **az indukció jelenségével foglalkozunk.** Rögzített görbe és a görbe által kijelölt felület esetén a harmadik Maxwell-egyenlet:

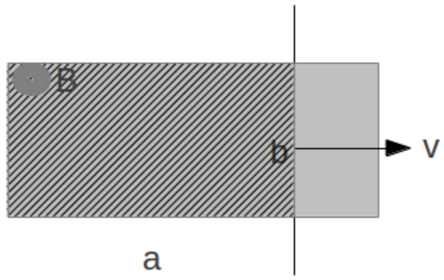
$$\oint Eds = -\frac{\partial B}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int Bdf = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ahol $\phi = \int Bdf$ a rögzített felületen átmenő mágneses fluxus. **Az indukált feszültség (elektromotoros erő) definíciója:** a töltésegységre ható erő érintő irányú komponensének egy tetszőleges zárt görbére vett körintegrálja, azaz a töltésegységen végzett munka. **Fontos megjegyezni,** hogy vezető jelenlétére nincsen szükség.

- Nyugalmi indukcióról beszélünk, ha a fluxus csak a B vektor változása miatt változik, maga a görbe (és persze ezáltal az általa kijelölt terület) rögzített. Ekkor az időben változó mágneses tér kelt elektromos teret, ez pedig mozgatja a töltést. Az indukált feszültség

$$U_i = \oint Eds = -\frac{d}{dt}\int Bdf = -\frac{d\phi}{dt} \tag{35}$$

- A mozgási indukciót példán át tanuljuk meg. Képzeljünk egy vezetőkből összerakott keretet, ami téglalap alakú (1. ábra), ami a saját síkjára merőleges homogén mágneses térben van elhelyezve. Minél jobbra kerül a vezetőrész, ami el tud mozdulni (az



1. ábra. A mozgási indukció szemléltetése

ábrán is bejelölt állandó v sebességgel) , annál nagyobb a terület, a fluxus ezáltal tud változni. A keretben gondolatban mozgatott töltésre (NEM áramról van szó!) a Lorentz-erő hatással van. Az a szakaszban nincsen munkavégzés, mert a töltés sebessége a szakaszokkal párhuzamos, a Lorentz-erőnek pedig nincs ilyen komponense. Munkavégzés a b szakaszban történik. Az indukált feszültség:
$$U_i = Bvb = bB\frac{da}{dt} = B\frac{d(ab)}{dt} = B\frac{df}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \tag{36}$$
A mínusz nem véletlen. A körüljárási irány meghatározza a felület normálisát a jobbkéz szabály szerint. Azért jött negatív előjel, mert a B és az n nem egyirányú. Ha az lenne, akkor a munkavégzés lenne negatív. **Egyébként ez a Lenz-törvény.**

A lineáris vezetőkből álló hálózatokra az első Kirchoff törvény változatlan, a második pedig az indukcióval bővül. A térben rögzített k-adik áramhurokra felírt Maxwellt az Ohm-törvény és a $B = rotA$ egyenlőség felhasználásával:
$$\oint \frac{jds}{\sigma} - \oint E'ds = -\frac{d}{dt}\int rotAdf = -\frac{d}{dt}\oint Ads$$
Ha ebbe behelyettesítjük a vektorpotenciált (A), amit már egyszer kiszámoltunk, továbbá feltételezzük, hogy nincs külső mágneses tér, csak az, amit az áramok létrehoznak, valamint hogy R_k, ϵ_k ismertek, a következő eredményre jutunk:
$$I_kR_k - \epsilon_k = -\frac{d}{dt}\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\sum_{i=1}^{n} I_i \oint\oint \frac{ds_k ds_i}{|r_k - r_i|} = -\sum_{i=1}^{n} L_{ik}\frac{dI_i}{dt} \tag{37}$$

A képletben szereplő

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{ds_i ds_k}{|r_k - r_i|}$$

az indukciós együttható. Ez i=k esetben értelmetlen, hiszen a nevezőben 0 szerepel, ami annak a következménye, hogy feltettük a lineáris vezetőt. Önindukció viszont létezik, akkor mást használunk. Ha az áramkörben kondi is van, akkor az Ohm-törvény helyett $\int Eds = \frac{Q}{C}$ összefüggést használjuk. Itt Q a kondi töltése, C pedig a kapacitása. Az áramkörre ilyenkor

$$\frac{Q}{C} + R\frac{dQ}{dt} + L\frac{d^2Q}{dt^2}$$

másodrendű differenciálegyenlet adódik. Megoldásához két kezdeti feltételre van szükség. A feltételek onnan származnak, hogy *tapasztalatunk szerint a fizikai terek (esetünkben E és B) nem változnak ugrásszerűen.* A két kezdeti feltétel tehát a következő:

- A kondenzátor feszültsége nem ugrik. $U = \int Eds$ csak folytonosan változhat
- Tekercs mágneses fluxusa nem ugrik. $\phi = \int Bds$ csak folytonosan változhat

Ha nincs több tekercs (pl. azonos vasmagra tekercselve), akkor a tekercs áramerőssége sem ugorhat, hiszen $\phi = \int Bdf \approx LI$

6. Energia, impulzus, impulzusmomentum

A teljes Maxwell-egyenletrendszer:

$$rotH = \frac{\partial D}{\partial t} + j_{val} \tag{38}$$

$$divD = \rho_{val} \tag{39}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{40}$$

$$divB = 0 \tag{41}$$

Az elsőt megszorozzuk -E-vel, a harmadikat H-val skalárisan, majd összeadjuk őket és integráljuk egy tetszőleges térfogatra.

$$-\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\epsilon}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2\right)dV = \int Ej_{val}dV - \int\left(ErotH - HrotE\right)dV$$

Itt már éltünk a feltételezéssel, hogy a közeg lineáris, azaz

$$D = \epsilon E$$

$$B = \mu H$$

A jobb oldal másik tagját a Gauss-tétellel alakítva eljutunk a végeredményhez, miszerint

$$-\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\epsilon}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2\right)dV = \int Ej_{val}dV + \oint(E \times H)df \tag{42}$$

Feladatunk innentől kezdve, hogy értelmezzük ezt az egyenletet. Az áramsűrűséget felbontjuk vezetési és konvektív részre

$$Ej_{val} = E\rho v + Ej_{vez} + E'j_{vez} - E'j_{vez}$$

Az E' a telepek elektromotoros erejére jellemző vektor. Azért csináltuk ezt a hozzáadást és levonást a végén, hogy alkalmazhassuk az Ohm-törvényt. Nézzük meg külön-külön a tagokat.

- $\int E\rho v dV$ A konvektív áram töltésein egységnyi idő alatt végzett munka.
- $\int(E+E')j_{vez}dV = \int \frac{j_{vez}^2}{\sigma}dV = \int \frac{I^2 ds}{\sigma q} = I^2R$ A **lineáris** vezetőben időegység alatt fejlődő Joule-hő.
- $-\int E'j_{vez}dV$ Az áramforrásból az elektromágneses térbe egységnyi idő alatt betáplált energia.

Tegyük fel, hogy a teljes (végtelen) térfogatot vizsgáljuk, véges szabad töltés jelenlétében. A végtelenhez tartva $\oint(E \times H)df$ az integrálási felület a távolság négyzetével egyenesen nő, az E és H értékek pedig a távolság négyzetével fordítottan csökkennek. Ezért ez a tag a végtelenben eltűnik. Mivel a nagy egyenlet jobb oldalán a mozgási energia megnő, az csak valami más energia rovására mehet. A jobb oldal tehát az elektromágneses tér energiájának megváltozása lehet.

$$u = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \tag{43}$$

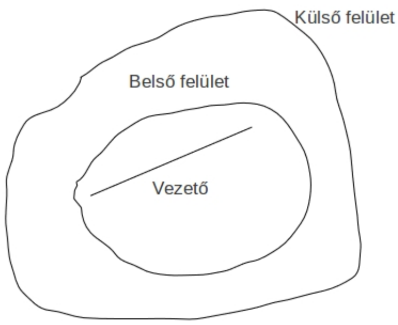
A (43) egyenlet az elmág tér energiasűrűsége. Ha van egy telepem és elkezdem feltölteni, akkor az elmág térből csatolok ki energiát és fordítva, illetve, ha egy vezetőben Joule-hő fejlődik, akkor az elmág tér energiájának kell csökkenni!

Ha a térfogatban sem szabad töltések, sem vezetők nincsenek jelen, akkor ebben csak úgy változhat meg az energia, ha a határán energia áramlik ki és be. Ezért a jobb oldal második tagja $\oint(E \times H)df$ az integrálási felületen ki-be áramló energia. Bevezetjük az

$$S = E \times H \tag{44}$$

energia, felület, idő dimenziójú mennyiséget, ami nem más, mint **az energiaáramsűrűség vektor, más néven a Poynting-vektor**. Nem más ez, mint a felületegységen időegység alatt átáramló energia mennyisége. Ugyanezt megcsinálhattuk volna a standard Maxwell-egyenletekkel is. Akkor a következő eredményt kaptuk volna $u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$ Az eredmény azért más, mert az előzőnél kihasználtuk, hogy csak valódi áramok vannak, itt azonban a polarizációs, mágneses, ... is szerepet játszik. `Ne felejtsük el, mert nagyon fontos, hogy a teret lineárisnak tekintettük`

6.1. Az elektrosztatikus tér energiája



Egyelőre az F_k és F_b között számolunk, majd a végén a külső részt a végtelenbe küldjük, a belsőt meg rá a vezetőre. Felhasználunk vektoranalitikai azonosságokat, a Gauss-tételt, a $\triangle\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ Poisson egyenletet és hogy $E = -grad\phi$. Így az elektromágneses tér energiájára

$$\frac{\epsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}\oint \phi \cdot grad\phi df + \frac{1}{2}\int \phi\rho dV \tag{45}$$

Most végezzük el a határátmenetet, miszerint a külső felülettel tartsunk a végtelenbe, a belsővel pedig a vezetőre. Ezzel az eljárással a következő összefüggéshez jutunk

$$U = \frac{1}{2}\int \phi\eta df + \frac{1}{2}\int \phi\rho dV \tag{46}$$

Az első tag a vezetőre vonatkozik[4] (ha van) a második pedig a töltésekre. Ha csak ponttöltés[5] van jelen, akkor

$$\frac{1}{2}\int \phi\rho dV = \frac{1}{2}\int\int \frac{\rho(r)\rho(r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} dV dV' = \sum_{parok} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0|r_i - r_j|}$$

Nincs olyan tag, hogy i=j, hiszen az a töltés sajátenergiája lenne, fizikai értelme nincsen, végtelent ad.

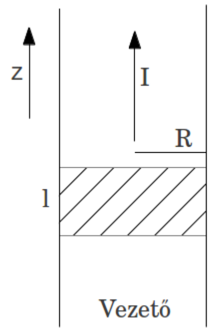
6.2. Az áram által keltett tér energiája

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2 dV \rightarrow \frac{1}{2}\int AjdV \longrightarrow \frac{1}{2}LI^2$$

Ahol A az ismerős vektorpotenciál, L pedig az önindukciós együttható.

[4] A felületi integrált is a vezető felületére kell elvégezni
[5] A ponttöltés töltéssűrűsége Dirac-delta

Hogyan jut el az energia a teleptől a fogyasztóig? Felírjuk az itt szereplő mennyiségeket.



Hogy néz ki az elektromos tér? Nézzük meg, ha $r < R$. Áttérünk henger koordinátákra, hiszen a feladat ilyen szimmetriát mutat. Ilyenkor az E-nek csak a z komponense és B-nek csak a φ komponense különbözik nullától.

$$E_z = \frac{I}{R^2 \pi \sigma}$$

$$B_\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I_r}{R^2}$$

A Poynting vektor pedig:

$$S_r = -\frac{1}{4\pi} \frac{I}{\sigma R^2 \pi} \frac{2I_r}{R^2}$$

Megnézzük, hogy a térfogatba (besatírozott rész) mennyi energia áramlik be időegység alatt? Ami bemegy, az a paláston mászik be. Az pedig pont $2\pi Rl$ területű.Az energia Joule-hővé alakul $q = R^2\pi$ **Az energia a vezetéken kívül jut el a fogyasztóhoz!**

6.3. Az elektromágneses tér impulzusa

Az egységnyi térfogatban lévő töltésekre ható erő (erősűrűség) $f = \rho E + \rho(v \times B)$. A töltésrendszer mechanikai impulzusának időegység alatt vett megváltozása $\frac{dP^m}{dt} = \int f dV$. Matematikai átalakításokkal a következő egyenlethez jutunk

$$\frac{d}{dt}\left(P_i^m + \epsilon_0 \int (E \times B)_i dV\right) = \sum_j \oint T_{ij} dF_j \qquad (47)$$

Az egyenletben szereplő T_{ij} a Maxwell-féle feszültségtenzor[6]. Előfordulhat, hogy a térfogat határfelületén a tenzor értéke nulla, így az elektromágneses térnek impulzust kell tulajdonítani.

$$g = \epsilon_0 (E \times B) = \frac{S}{c^2} \qquad (48)$$

[6]T azért tenzor, mert nem csak az irányt kell megadni, hanem azt is, hogy melyik impulzus melyik komponense áramlik

Az impulzussűrűség, a

$$T_{ij} = \epsilon_0 \left(E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} \left(E^2 + c^2 B^2 \right) \delta_{ij} \right) \tag{49}$$

pedig az impulzusáramsűrűség!

Az elektromágneses tér impulzusának bizonyítéka a fénynyomás (Lebegyev-kísérlet). Egy teljesen tükröző f felületre a felület normálisával θ szöget bezáró fénysugár esik be. A tükröt a felületére merőleges irányban időegység alatt $g \cdot cos\theta f c cos\theta$ impulzus[7] éri. A tükörnek átadott impulzus

$$\triangle I = 2gc \cdot cos^2\theta f$$

A nyomás pedig:

$$\frac{F}{f} = \frac{\triangle I}{f} = 2g \cdot c \cdot cos^2\theta$$

[7] $fc \cdot cos\theta$ az f alapú $c \cdot cos\theta$ magasságú hasáb térfogata. Időegység alatt az ebben lévő impulzus jut el a felületre.

7. Elektromágneses hullámok

7.1. Elmág hullámok áram és töltés nélküli térben

Felírjuk a teljes Maxwell-egyenletrendszert töltés és áram nélküli szabad térben. Ilyenkor $j = 0$ és $\rho = 0$

$$c^2 rotB = \frac{\partial E}{\partial t} \tag{50}$$

$$divE = 0 \tag{51}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{52}$$

$$divB = 0 \tag{53}$$

Keresünk a triviálistól (E,B=0) különböző megoldást. Az első egyenlet rotációját képezve

$$rotrotB = graddivB - \triangle B = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

és kihasználva a $divB = 0$ egyenletet a következőhöz jutunk

$$\triangle B - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0 \tag{54}$$

Hasonlóan levezethető az elektromos térerősségre is

$$\triangle E - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \tag{55}$$

Ezeket szabad (vagy homogén) hullámegyenleteknek nevezzük. Vektoregyenletek, tehát E és B mindhárom derékszögű komponensére ilyen egyenletek érvényesek. Speciális megoldását keressük az egyenleteknek.

$$E(r,t) = E_0 f\left(t - \frac{nr}{c}\right)$$

megoldása az egyenletnek, ha E_0 állandó, n pedig tetszőleges egységvektor, f argumentumának tetszőleges függvénye. **Ez a síkhullám megoldás.**

Be kellene látni, miért síkhullám? Hol vannak a térben azok a pontok, amelyekben az adott t_0 pillanatban az E ugyanazt az értéket veszi fel? Biztos, hogy az E értéke ugyanannyi lesz az olyan pontokban, melyre teljesül, hogy $t_0 - \frac{nr}{c}$ állandó. Mivel t_0 állandó, a nevezőnek is annak kell lennie. Ez nem más, mint az n helyvektorra merőleges sík egyenlete. Ismételjük meg a kérdést, de most már úgy, hogy $t_0 + \Delta t$ időben az E ugyanazt veszi fel, amit felvett az előző síkon t_0 időben. Ez azokra az $r + \Delta r$ pontokra teljesül, melyekre $t_0 - \frac{nr}{c} = t_0 + \Delta t - \frac{n(r+\Delta r)}{c}$ teljesül. Innen $n \cdot \Delta r = c \cdot \Delta t$. Megtudtuk tehát, hogy a két sík egymástól $c\Delta t$ távolságra van, azaz a c nem más, mint a hullám terjedési sebessége, az n pedig a terjedés iránya.

Hasonlóképpen belátható, hogy

$$E(r,t) = E_0 \frac{1}{r} f\left(t \pm \frac{r}{c}\right)$$

a gömbhullám megoldás. Az indoklás az előzőhöz hasonlóan történik. A - előjel egy pontból kifutó, a + pedig az egy pontba befutó hullámra vonatkozik. Mivel a hullámegyenlethez a Maxwell deriválásával, nem azonos átalakítások során jutottunk, meg kell nézni kielégítik-e a Maxwelleket. Ha a síkhullámot beírjuk a divergencia képletekbe, megkapjuk, hogy azok egyenként merőlegesek a terjedési irányra, a rotációs egyenletekből pedig azt kapjuk, hogy egymásra is merőlegesek. Az ilyen transzverzális hullámban az **energiasűrűség**

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}B^2 = \epsilon_0 E^2 \tag{56}$$

Az energiaáramsűrűség vektor pedig

$$S = \epsilon_0 c^2 E \times B = cun \tag{57}$$

Az energiaszállítás iránya tehát a terjedési irány. *Most üres térben terjedő elektromágneses hullámokat vizsgáltunk, az állítások ezekre vonatkoznak. Vannak longitudinális hullámok is, drótokban például ilyenek is terjedhetnek. Ilyenkor a vezető felületén érvényes határfeltétel miatt az E_0 (B_0)amplitúdó nem állandó.*

7.2. Vezetőben terjedő elmág hullámok

Felírjuk a Maxwell-egyenleteket:

$$c^2 rotB = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\epsilon_0} \tag{58}$$

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{59}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{60}$$

$$divB = 0 \tag{61}$$

Feltesszük továbbá, hogy $\rho_{val} = 0$, $B = \mu H$ és $D = \epsilon E$. Innen az áramsűrűség $j = \sigma E$

Azzal a levezetéssel, amit az előző pontban hajtottunk végre, eljutunk az ún. **távíró-egyenletekig:**

$$\Delta E - \mu\epsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t} = 0 \tag{62}$$

$$\Delta B - \mu\epsilon\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial B}{\partial t} = 0 \tag{63}$$

- A $\sigma = 0$ esetben a dielektrikumokban érvényes hullámegyenleteket kapjuk, a terjedési sebesség ott

  $$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

  Minden más ugyan az, mint vákuumban.

- A periodikus síkhullám megoldás[8]

$$E(r,t) = E_0 e^{\frac{\omega}{c}\kappa(nr)} e^{i(\omega t - kr)}$$

$$B(r,t) = B_0 e^{\frac{\omega}{c}\kappa(nr)} e^{i(\omega t - kr)}$$

A képletben szereplő kappa az extinkciós együttható. A síkhullámok transzverzálisak, megoldásunk végtelen vezetőben érvényes. E és B merőlegesek egymásra, fáziskülönbségük is van, ami nem túl nagy frekire és vezetőre jó! A képlet szerint a jó szigetelő átlátszó, mert szigma=0 esetben kappa is nulla, ellenben a vezető nem átlátszó. A tapasztalat ennek ellentmond, hiszen az ebonit nem átlátszó, a konyhasó vizes oldata pedig az. Ez már két ellentmondás. Abból ered, hogy mi feltételeztük, hogy a szigma egy, a frekvenciától független állandó, ám ez a látható fény tartományában már egyáltalán nem igaz. *Ha ilyen hullám vezetőre esik be, akkor a haladással exponenciálisan csökken az amplitúdó, hiszen az elmág hullám hatására áram indul meg, melyből hő keletkezik. Emiatt az elmág tér energiája csökken.*

7.3. Síkhullámok polarizációja

A szabad hullámegyenlet periodikus síkhullám megoldása komplex írásmódban

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)}$$

. A komplex írásmódot csak technikai könnyítések miatt alkalmazzuk. Fizikai jelentése a valósrészeknek van. Komplex írásmódban az E_0 is lehet komplex. Válasszuk a terjedési iránynak a z-tengelyt, legyen $k = (0, 0, k)$ így az exponenciális kitevőjében a hullámszám vektor és helyvektor skalárszorzatának eredménye $(\omega t - kz)$, jelöljük ezt τ-val. A síkhullám általános alakja valós írásmódban

$$E_0 = (a_1 cos\tau, a_2 cos(\tau + \alpha), 0)$$

Az alfás fázistolás onnan jön, hogy az E_0 is lehet komplex mennyiség. Az E_x, E_y egyenletpár valamilyen görbe paraméteres egyenlete az (E_x, E_y) síkon. Négyzetre emelve és összeadva ezeket a következőt kapjuk:

$$\frac{E_x^2}{a_1^2} + \frac{E_y^2}{a_2^2} - \frac{2E_xE_y}{a_1a_2} cos\alpha = sin^2\alpha$$

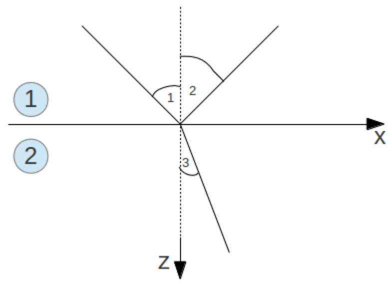
Ez egy kúpszelet egyenlete. A determinánsa nagyobb, mint nulla, ezért a kúpszelet ellipszis (speciális esetben, mikor $\alpha = 0$, egyenespár). Azt lehet mondani tehát, hogy az elektromágneses síkhullám általában elliptikusan polarizált. **Az állítás hullámvonulatra érvényes. Az egymás után érkező vonulatokban a térerősség általában különböző ellipsziseken fut körbe, ezért ha egészében nézzük, a más-más ellipszisek miatt polarizálatlan fénynek tekintjük**. Akkor mondhatjuk valamire, hogy polarizált, ha a hullámcsomagok egészében ugyanolyan polarizáció figyelhető meg. Két speciális esetet nézünk meg:

[8] A képletekben szereplő k már a hullámszám vektor

- $\alpha = l \cdot \pi$, ahol l egy egész szám. Ekkor egyenespár egyenletéhez jutunk, ami lineáris polarizációnak felel meg.

- $\alpha = (2l + 1)\frac{\pi}{2}$, ahol l szintén egész szám. Így egy kör egyenletéhez jutunk, tehát ez a cirkuláris polarizáció.

7.4. Törés és visszaverődés



Az ábrán nem tudtam bejelölni. Az 1,2,3 rendre θ, θ' és θ'' Egyébként az ábrán két dielektrikum sík határfelületén tapasztalható fénytörés és visszaverődés látható. Legyen a beeső hullám

$$E = E_0 e^{i(\omega t - kr)}, B = \frac{1}{\omega} k \times E$$

a visszavert hullám

$$E' = E_0' e^{i(\omega' t - k' r)}, B' = \frac{1}{\omega'} k' \times E'$$

és a megtört hullám

$$E'' = E_0'' e^{i(\omega'' t - k'' r)}, B'' = \frac{1}{\omega''} k'' \times E''$$

A két közeget elválasztó felületen határfeltételek érvényesek. Feltéve, hogy nincseken felületi töltések és áramok, z=0-nál:

$$E_{t1} = E_{t2}$$
$$B_{n1} = B_{n2}$$
$$D_{n1} = D_{n2}$$
$$H_{t1} = H_{t2}$$

A mi esetünkben az első egyenlet $E_t + E_t' = E_t''$ alakú, a többi hasonlóan alakul. Ezek a feltételek a felület végtelen sok pontjában, végtelen sok időpillanatban teljesülnek, ami csak úgy lehetséges, hogy E, E', E'' tér és időbeli változása z=0-nál azonos, tehát a fázistényezők megegyeznek

$$(\omega t - kr) = (\omega' t - k' r) = (\omega'' t - k'' r)$$

Ezekből az egyenletekből az r vektor megfelelő választásával megkapjuk a törés és visszaverődés törvényeit:

- $\omega = \omega' = \omega''$ (x=y=0 választással) a körfrekvenciák megegyeznek. A beeső és visszavert sugár ugyanabban a közegben terjed, ezért $k = k'$

- A hullámszám vektorok egyenlőek, tehát egy síkban vannak (x=0 választás arra vezet, hogy $\varphi = \varphi' = 0$)
- $k \sin\theta = k' \sin\theta' = k'' \sin\theta''$. Mivel $k = k'$, ezért $\theta = \theta'$, így a beesési szög egyenlő a visszaverődési szöggel.

A második egyenlőségből

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{k''}{k} = \sqrt{\frac{\epsilon''\mu''}{\epsilon\mu}} = \frac{n''}{n} = n_{12}$$

Ezzel bevezettük a törésmutatókat[9] és a 2-es közegnek az 1-es közegre vonatkoztatott relatív törésmutatóját. Ez a **Snellius-Descartes törvény.** Érdemes megjegyezni, hogy nem használtuk ki a határfeltételeket, csak azt, hogy léteznek. A 2-es közegben a térerősség $E'' = E_0 e^{i(\omega t - k'' \sin\theta'' x - k'' \cos\theta'' z)}$ A Snellius-Descartes törvényből:

$$cos\theta'' = -\frac{i}{n_{12}}\sqrt{sin^2\theta - n_{12}^2}$$

Ha az $n_{12} < 1$, a fény optikailag sűrűbb közegből optikailag ritkább közegbe megy át, akkor

$$E'' = E_0'' e^{-\frac{1}{n_{12}}\sqrt{sin^2\theta - n_{12}^2}k''z} e^{i(\omega t - k'' sin\theta'' x)}$$

Ez a **teljes visszaverődés. Jellemzői, hogy ilyenkor a határfelülettel párhuzamosan síkhullám terjed, a z tengely mentén pedig exponenciális lecsengés tapasztalható. Ilyenkor is van tehát hullám, nem csak a visszaverődő.** Az egész akkor igaz, mikor már beállt a stacionárius állapot. A dinamikai törvényekből majd megtudjuk milyenek lesznek a visszavert és megtört sugarak közti energiaviszonyok.

Dinamikai törvények

Speciális esetet vizsgálunk: merőleges beesést ($\theta = 0$) Az exponenciálisokkal a fázisok egyenlősége miatt le lehet egyszerűsíteni. Továbbra is élünk a feltételezéssel, hogy a közeg lineáris.

Vizsgáljuk mi történik olyan szigetelő jelenlétében, amire $\mu = 1$. Ilyenkor

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}$$

$$\frac{E_0''}{E_0} = \frac{2}{1 + n_{12}}$$

Az időre (egy periódusra) átlagolt energiaáramsűrűség vektorok nagysága:

$$|S| = \epsilon_0 c^2 \frac{1}{2}|(E_0 \times B_0)| = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\sqrt{\epsilon}E_0^2$$

[9] $n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}}$

$$|S'| = \epsilon_0 c^2 \frac{1}{2} |(E_0' \times B_0')| = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sqrt{\epsilon'} E_0'^2$$

$$|S''| = \epsilon_0 c^2 \frac{1}{2} |(E_0'' \times B_0'')| = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \sqrt{\epsilon''} E_0''^2$$

Az $1/2$ az időátlagolás következménye. Definiáljuk az r visszaverődési és a d áteresztési együtthatót:

$$r \equiv \frac{|S'|}{|S|} = \left(\frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}} \right)^2 \tag{64}$$

$$d \equiv \frac{|S''|}{|S|} = \frac{4n_{12}}{(1 + n_{12})^2} \tag{65}$$

Ezek az ún. Fresnel-formulák. Jó tudni, hogy $r + d = 1$.

Interferencia

Két síkhullám találkozásakor létrejöhet az interferencia. Az $E = E_1 + E_2$ és $B = B_1 + B_2$ szuperpozíciók is megoldásai a Maxwelleknek, viszont az intenzitások, az energiasűrűség és az energiaáramsűrűség nem adódnak össze. Ezeket összefoglalóan I-vel jelölve

$$I = I_1 + I_2 + I'$$

, ahol $I_1 \approx E_1^2$, $I_2 \approx E_2^2$ és $I' \approx E_1 E_2$. Az utolsó az interferencia-tag. Pillanatnyi interferencia általában mindig van, de nem észleljük, mert ez nagyon gyorsan változik. Tartós interferencia akkor jön létre, ha az I' időátlaga nem nulla. Ennek 3 feltétele van:

- Azonos frekvencia
- Geometriai feltétel: mivel az interferencia a két térerősség skalárszorzatával arányos, ha azok merőlegesek egymásra (ellentétes polarizáció), akkor nincs. Tehát a 2. feltétel, hogy $E_1 E_2 \neq 0$
- Koherencia-feltétel: A komplex írásmódban felírt térerősség tartalmaz egy $e^{i\varphi}$ tagot. Véges hullámvonulatok fázisállandója rendszertelenül ingadozik. Ha a találkozó síkhullámok fázisállandóinak különbsége nem állandó, nem lesz interferencia. Tehát legyenek koherensek. Mint tudjuk, a lézer alapból ilyen fényt bocsájt ki. Jupí.

8. Retardált potenciálok, dipólsugárzás, fényszórás

A teljese egyenletrendszer:

$$c^2 rotB = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{j}{\epsilon_0} \tag{66}$$

$$divE = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{67}$$

$$rotE = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{68}$$

$$divB = 0 \tag{69}$$

Az elektrosztatikában már bevezettük a skalárpotenciált, a stacionárius áramnál a vektorpotenciált, most pedig ugyanezek legáltalánosabb alakját tárgyaljuk meg. Mivel B divergenciája 0, bevezethető a vektorpotenciál, $B = rotA$. Beleírva a harmadik egyenletbe, azt kapjuk, hogy

$$rot\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0$$

, ezért a $E + \frac{\partial A}{\partial t}$ vektor írható fel gradiensként.

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -grad\Phi$$

Az $A' = A + grad\chi$ és $\Phi' = \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}$ ugyanazt az E és B értéket határozzák meg, mint A és χ és most is csak egy mértéktranszformáció erejéig vannak meghatározva. Ennek örülünk, hiszen ismét előírhatunk valamit. Kiróható egy mellékfeltétel, ami egyszerűsíti az egyenleteket. Írjuk elő azt, hogy

$$divA = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

teljesüljön. Ekkor **Lorentz-mértékben dolgozunk.** A potenciálokra ilyenkor a következő két egyenletet kapjuk:

$$\triangle\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{70}$$

$$\triangle A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{j}{\epsilon_0 c^2} \tag{71}$$

Ezek pedig inhomogén hullámegyenletek. Megoldásai a következők[10]:

$$\Phi(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(r',t')}{|r-r'|}dV' \tag{72}$$

valamint

$$A(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{j(r',t')}{|r-r'|}dV' \tag{73}$$

[10] Az alábbi megoldások mellett a Lorentz-feltételt is kielégítik

Ahol $t' = t - \frac{|r-r'|}{c}$.

Ezek a retardált potenciálok. A retardálás (időbeli késés) az idő szerinti második derivált hatása. Fizikai jelentésük természetesnek látszik. A hatás nem pillanatszerű, c sebességgel terjed. Az $\frac{|r-r'|}{c}$ idővel korábbi töltés, vagy árameloszlás határozza meg a skalár, ill. vektorpotenciált. Pont ennyi időre van szükség, hogy az a hatás az r' pontból az r pontba. *Az inhomogén hullámegyenletnek megoldásai az avanzsált potenciálok is. Ezek szerint a hatást kiváltó ok csak a hatás után következik be, tehát semmi fizikai jelentéssel nem bírnak*

Rezgő dipólus tere

Az r_0 helyvektorú pontban legyen egy $p(t)$ dipólmomentumú antenna. Ennek a sűrűségvektora, a polarizáció vektor $P(r,t)$. p a P térfogati integráljaként áll elő.

$$p(t) = \int P(r,t)dV$$

A pontszerűség miatt a dipólmomentum-sűrűség:

$$P(r,t) = p(t)\delta(r - r_0)$$

A két retardált potenciál:

$$\Phi(r,t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{div' P(r',t')}{|r-r'|}dV'$$

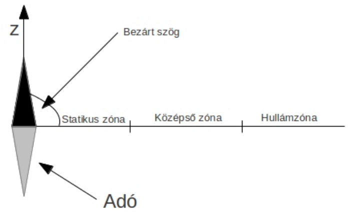
$$A(r,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\frac{\partial P}{\partial t}(r',t')}{|r-r'|}dV'$$

A t' és div' azt jelenti, hogy állandó t' mellett kell deriválni. Az integrálások a Dirac-delta segítségével elvégezhetők. Az eredményt nem írom le, a tanári jegyzetben megtalálható. Hosszadalmas számolás után eljuthatunk a végeredményhez, amit szintén nem közlök, mert a Tanár Úr jelezte, hogy ne tanuljuk meg, hiszen felesleges. Amit viszont tudni kell, hogy **a megoldásban jól elkülöníthető három rész. E első két tagja a dipólus statikus elektromos tere. Ha p időfüggetlen, akkor csak ez van. E másik két tagja és B első tagja a polarizációs áram elektromágneses tere. E utolsó két tagja és B második tagja a gyorsuló dipólus által kisugárzott elektromágneses hullám.** Ismételten, jobban átlátható felírásban

$$E = [sztatikuster] + [polarizaciosaramelektromostere] + [elektromagneseshullam]$$

Persze mindenhol megtalálható minden, csak mind a három részben az dominál leginkább, amit mi megemlítettünk. Az előbbi kifejtésből kiderült, hogy a B csak 2 tagú. Ez azért van így, mert statikus dipólusnak nincsen mágneses tere.

Vizsgáljuk meg a nagyságrendi viszonyokat. Legyen $p(t) = p_0 e^{i\omega t}$, $p_0 = (0,0,p_0)$, $r_0 = (0,0,0)$. Ha összehasonlítjuk a három tárgyalt rész nagyságrendjét, azt tapasztaljuk,



hogy az egymás melletti értékek hányadosa $2\pi\frac{r}{\lambda}$. Ez azt jelenti, hogy például egy 500 méteres hullámhossz és r=50 km esetén ez az érték nagyjából 600. A dipólushoz közel a statikus zónában az elektrosztatikus tér dominál, távolabbi zónában az elektromágneses sugárzás. Ezt a sugárzást felírjuk gömbi koordinátákban:

$$E_\vartheta = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} sin\vartheta \frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}$$

$$B_\varphi = \frac{\omega^2 p_0}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} sin\vartheta \frac{e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}}{r}$$

A többi komponens nulla. A teta a hosszúsági a fí a szélességi kör érintője. Látszik a képleten, hogy valami olyasmi, mint egy gömbhullám. Ez látszik az r függésen is, valamint az E és B egymásra is és az r-re is merőleges. A dipólus a saját irányába nem sugároz, hiszen teta 0 és 180 foknál nullát ad. A sugárzás tehát az egyenlítő irányába maximális. A Poynting vektor sugárirányú

$$|S| = \frac{P_0^2\omega^4}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2\vartheta \cos^2\omega\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{74}$$

Az energiaszállítás nem izotróp, hanem helyfüggő. Gondoljuk a rádióadásra.

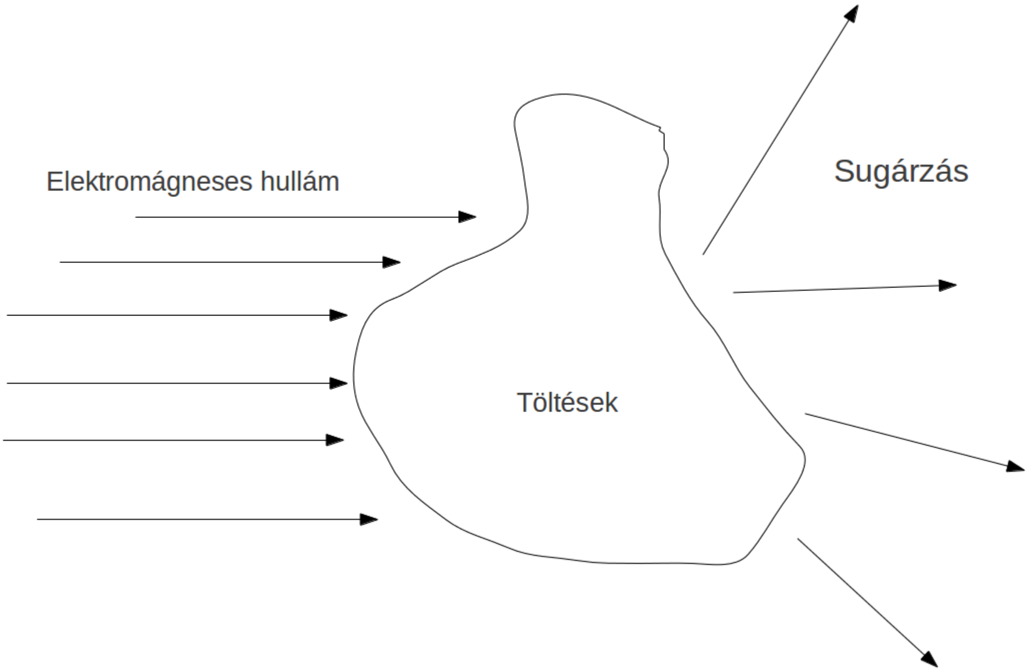
Időátlagolást. csinálunk az r sugarú gömb felületén időegység alatt átáramló energiára[11]

$$U_{sec} = \frac{1}{T}\int_0^T \int |S|\, dt r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{P_0^2\omega^2}{(2\pi)^2\epsilon_0 c^3}$$

8.1. Fényszórás

A fényszórás olyan folyamat, melynek során a porszemekre, vízcseppekre érkező elektromágneses hullám megrezgeti az ott lévő töltéseket, a rezgő töltések pedig újabb elektromágneses hullámokat sugároznak ki. Legyen S_{be} a bejövő hullám energiaáramsűrűség

[11] Ezt a részt nézd meg pontosan, azt hallottam vizsgán szereti hallani a részleteit. A jegyzetben kicsit ködös az a levezetés, azért nem írom bele. Az előadáson csak ennyit írt fel rá.



vektora, dU_{sec} a töltésrendszer által $d\Omega$ térszögbe egy másodperc alatt kisugárzott energia. A szórás $d\Omega$ térszögre eső differenciális hatáskeresztmetszete[12]

$$d\Omega = \frac{dU_{sec}}{|S_{be}|}$$

A teljes hatáskeresztmetszetet úgy kapjuk, hogy az előzőt a teljes térszögre integráljuk.

8.1.1. Szórás egyetlen szabad töltésen

Feltevések:

- A rezgő töltés sebessége bőven a fénysebesség alatt van, hiszen az valami porszemen ül. A Coulomb erő mellett a Lorentz-erőt elhanyagolhatjuk, hiszen $|B| = \frac{|E|}{c}$
- A töltést az origóba tesszük, ami körül rezeg, mi mégis úgy számolunk, mintha mindig ott lenne.

$E_0 \cos \omega t$ -t használunk! A töltés mozgásegyenlete $m\ddot{r} = eE_{be}$, dipólmomentuma $p = er$, $\ddot{p} = \frac{q^2}{m} E_{be}$. A rezgő töltés által keltett elmág tér kifutó gömbhullám része:

$$E_{ki} = \frac{(\ddot{p} \times r) \times r}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^4}$$

[12]Nem jelöltem be, de a törtben szereplő mennyiségek időátlagát kell venni. Felülvonás kellene rá, de nem bírom megtalálni hol van.:)

$$B_{ki} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\ddot{p}\times r}{r^2}$$

A $\ddot{p}$ argumentuma mindig a retardált idő. A kifutó energiaáramsűrűség[13]

$$|S_{ki}| = \frac{1}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3}\frac{1}{r^2}\frac{q^4}{m^2}|E_{be}|^2 sin^2\vartheta$$

Itt ϑ az r és az E vektorok által bezárt szög. A $d\Omega$ térszögbe időegység alatt kisugárzott átlagos energia

$$dU_{sec} = \frac{E_0^2}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3}\frac{q^4}{m^2}sin^2 d\vartheta d\Omega$$

Az egy periódusra átlagolt bejövő energiaáramsűrűségvektor

$$|S_{be}| = \epsilon c\frac{E_0^2}{2}$$

Végezetül a differenciális hatáskeresztmetszetből $\left(d\sigma = \frac{dU_{sec}}{|S_{be}|}\right)$ számolható a teljes hatáskeresztmetszet, amit **Thomson hatáskeresztmetszetnek is hívunk**

$$\sigma = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2\int \sin^3\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2}\frac{8\pi}{3}\left(\frac{q^2}{mc^2}\right)^2 \tag{75}$$

A $\frac{q^2}{mc^2}$ kifejezés neve a klasszikus elektronsugár. Vigyázzunk azonban, ez csak Gauss-mértékegységrendszerben távolság dimenziójú.

8.1.2. Szórás kis dielektromos gömbön

A dielektrikumoknál tárgyaltak szerint $p \approx E_{be}$, ezért a $\ddot{p}$-ban egy ω^2 szorzótényező jelenik meg és a teljes hatáskeresztmetszet $\sigma \approx \frac{\omega^4}{c^4} = \frac{1}{\lambda^4}$ Na és akkor tegyük fel a kérdést, miért kék az ég? Azért, mert a légkör fluktuációin szóródó fényből a kéknek a legnagyobb a hatáskeresztmetszete. Mikor megy le a nap, a kék már kifelé szóródik.

[13] Azért mondogatom ennyiszer, hogy megjegyezzük. Egyébként a Poynting vektorról van szó!

9. Geometriai optika

A geometriai optika a fényterjedést sugarakkal írja le. Nézzük meg az elmág hullám terjedését izotróp inhomogén szigetelőben. A hullámegyenlet $\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - v^2(r)\Delta\Psi = 0$ alakú, ahol v a helyfüggő terjedési sebesség, pszí pedig a B, vagy az E valamelyik derékszögű komponense. Monokromatikus megoldás a $\Psi = \Psi_0(r)e^{i\omega t}$. Itt $\Psi_0(r)$ a

$$\Delta\Psi_0(r) + \frac{\omega^2}{v^2(r)}\Psi_0(r) = 0$$

egyenletnek tesz eleget. Ennek a megoldását keressük $\Psi_0(r) = a(r)e^{-ikL(r)}$ alakban. Az L neve eikonál (fényút). Az L=állandó felület normálvektora jelöli ki a fény terjedési irányát az adott pontban. Síkhullámban, állandó terjedési sebesség esetén $L = nr$. Az L=áll. esetben azonos fázisú felületekhez jutunk.

Ψ_0 közel lineáris, ha az a(r) lassan változik és L(r) közel lineáris. Definiáljuk a törésmutatót

$$n(r) \equiv \frac{\omega}{kv(r)}$$

Ahol k a vákuumbeli hullámszám (jelen esetben tehát nem vektorként szerepel a képletben).

A $\lambda \to 0$ határesetben az egyenlet a

$$(gradL)^2 = n^2$$

közelítő alakban írható, ez **az eikonál-egyenlet.** Mivel ez elég pongyola közelítés, le kell tisztázni mihez képest kicsi az a lambda. Az elhanyagolás feltételei:

- $\frac{|grada(r)|}{a(r)} << \frac{1}{\lambda'}$, ahol λ' a közegbeli hullámhossz.
- A hullámfelület (L=állandó által meghatározott)$>> \lambda$.
- A hullámfront lineáris méretei (pl. gömbhullámnál a gömb sugara)$>> \lambda$

A feltételek nem mindig teljesülnek. Az első sérül fény és árnyék határán, a másik kettő pedig nem érvényes fényforrások és fókuszok közelében.

Izotrop közegben a k hullámszám vektor a fénysugarak irányába mutat, merőleges az L=áll. felületekre. Ekkor az Eikonál-egyenletből gyökvonással $L = \frac{\mathbf{k}}{k}\mathbf{n}$. Tetszőleges zárt görbére igaz, hogy

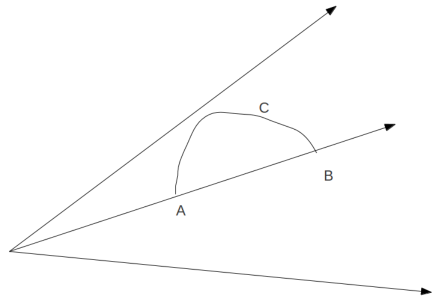
$$\oint n\mathbf{k}ds = k\oint gradLds = 0$$

Alkalmazzuk ezt a következőre:

$$\int_A^B nkds + \int_C nkds = k\int_A^B nds + \int_C nkds = 0$$

A skalárszorzat tulajdonságaiból tudjuk, hogy az olyan integrál értéke, melyben a k vektorként szerepel, kisebb, mint azé, ahol skalár.Így eljutunk a **Fermat-elvig**

$$\int_A^B nds = -\frac{1}{k}\int_{BCA} nkds = \frac{1}{k}\int_{ABC} nkds \leq \int_{ACB} nds \tag{76}$$



Az integrálokban k mindenütt vektor! Az $\int nds$ optikai úthossz a fénysugár mentén minimális. Ez a Fermat-elv. Tudván, hogy $n = \frac{c}{v}$, arra jutunk, hogy $c \int \frac{ds}{v(r)}$ és így $T = \int \frac{ds}{v(r)}$ terjedési idő minimális a fénysugár mentén.

Alkalmazásként. határozzuk meg a Fermat-elvből a Snellius-Descartes törvényt. Az 1-es közeg $P_1(x_1, y_1)$ pontjából a két közeget elválasztó sík határfelületén melyik $P(x, 0)$ ponton keresztül vezet a legrövidebb fényút a 2-es közeg $P_2(x_2, y_2)$ pontjához? Annak kell teljesülni, hogy

$$\int nds = min = n_1\sqrt{(x - x_1)^2 + y_1^2} + \sqrt{(x - x_2)^2 + y_2^2} = min$$

Ebből az következik, hogy

$$n_1 \sin \vartheta = n_2 \sin \vartheta''$$

Pontosan ezt kellett belátnunk.